

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2 + 11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La proposition est vraie pour $n=0$ car

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \times 0 & \frac{-5 \times 0^2 + 11 \times 0}{2} \\ 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I \quad (\text{la matrice identité d'ordre } 3)$$

$$= A^0 \quad (\text{par convention})$$

- Supposons $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2 + 11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

pour un entier naturel n fixé, et montrons qu'alors

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 5(n+1) & \frac{-5(n+1)^2 + 11(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^{n+1} = A^n A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2 + 11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5+5n & 3-5n+\frac{-5n^2+11n}{2} \\ 0 & 1 & -1-n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5(n+1) & \frac{6-10n-5n^2+11n}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5(n+1) & \frac{-5n^2 + n + 6}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} -5(n+1)^2 + 11(n+1) &= -5(n^2 + 2n + 1) + 11n + 11 \\ &= -5n^2 - 10n - 5 + 11n + 11 \\ &= -5n^2 + n + 6. \end{aligned}$$

Par suite

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 5(n+1) & \frac{-5(n+1)^2 + 11(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2 + 11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout entier naturel n .